

2.9.26 Logaritmické rovnice (shrnutí)

Předpoklady: 2922

Pedagogická poznámka: Smyslem hodiny je stejně jako u jiných shrnutí nácvik „výběru metody“. S jedinou výjimkou jsou všechny příklady typickou obdobou příkladů, které jsme již řešili, a jde pouze o to, aby studenti dokázali vybrat, která z metod se k danému příkladu hodí. Pokud studenti nevědí, vždy se bavíme o tom, jaké rysy příklad má, co to znamená pro jejich řešení atd..

Př. 1: Vyřeš rovnici $\log x^2 + \log x^4 = 3$.

Podmínky: $x \neq 0$.

Upravíme rovnici: $\log x^2 + 2\log x^2 = 3$

$$3\log x^2 = 3$$

$$\log x^2 = 1$$

$$\log x^2 = \log 10$$

$$x^2 = 10$$

$$x_1 = \sqrt{10} \quad x_2 = -\sqrt{10} \quad K = \{\pm\sqrt{10}\}$$

Pedagogická poznámka: Studenti většinou odstraní mocniny z argumentů logaritmů a tím přijdou o záporný kořen. Opět jde o to, že jsme takový příklad už řešili, studenty překvapil a měli by si tento problém pamatovat (nebo ho mít zachycený v arzenálu).

Př. 2: Vyřeš rovnici $\frac{\log x - 2}{\log x + 1} = \frac{\log x + 3}{\log x - 1}$.

Podmínky:

- Vnitřky logaritmů: $x > 0$.
- Zlomky: $\log x + 1 \neq 0 \Rightarrow \log x \neq -1 \Rightarrow x \neq 0,1$
 $\log x - 1 \neq 0 \Rightarrow \log x \neq 1 \Rightarrow x \neq 10$

Neznámá se vyskytuje pouze ve výrazu $\log x \Rightarrow$ provedeme substituci a tím se příklad zjednoduší.

Substitute: $y = \log x$

$$\frac{y-2}{y+1} = \frac{y+3}{y-1} \quad / (y+1)(y-1)$$

$$(y-2)(y-1) = (y+3)(y+1)$$

$$y^2 - 2y - y + 2 = y^2 + 3y + y + 3$$

$$-3y = 4y + 1$$

$$-1 = 7y$$

$$y = -\frac{1}{7}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y = \log x = -\frac{1}{7}$$

$$\log x = \log 10^{-\frac{1}{7}}$$

$$x = 10^{-\frac{1}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{10}}$$

$$K = \left\{ \frac{1}{\sqrt[7]{10}} \right\}$$

Př. 3: Vyřeš rovnici $x^{\log x - 3} = \frac{x}{1000}$.

Podmínky: $x > 0$.

Neznámá je v exponentu \Rightarrow rovnici zlogaritmuje, abychom neznámou dostali z exponentu dolů.

$$\log x^{\log x - 3} = \log \frac{x}{1000}$$

$$(\log x - 3) \log x = \log x - \log 1000$$

$$(\log x - 3) \log x = \log x - 3$$

V rovnici se vyskytuje druhá mocnina logaritmu \Rightarrow substituce.

Substituce: $y = \log x$

$$(y - 3)y = y - 3$$

$$y^2 - 3y = y - 3$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(y - 3)(y - 1) = 0$$

$$y_1 = 3$$

$$y_2 = 1$$

Návrat k původní proměnné:

$$y = \log x = 3$$

$$y = \log x = 1$$

$$\log x = \log 10^3$$

$$\log x = \log 10^1$$

$$x = 1000$$

$$x = 10$$

$$K = \{10; 1000\}$$

Pedagogická poznámka: Nejčastějším problémem je opět vynechání závorky při úpravě

$$\log x^{\log x - 3} = \log \frac{x}{1000} \Rightarrow (\log x - 3) \log x = \log x - \log 1000.$$

Př. 4: Vyřeš rovnici $2 \log x^3 - 3 \log \sqrt{x} + \log 2 = 2 \log x + \log 4 - \frac{1}{2} \log x$.

Podmínky: $x > 0$.

Mezi logaritmy se vyskytuje pouze sčítání a odčítání \Rightarrow můžeme převést na tvar

$$\log \text{výraz} 1 = \log \text{výraz} 2.$$

$$2 \log x^3 - 3 \log \sqrt{x} + \log 2 = 2 \log x + \log 4 - \frac{1}{2} \log x$$

$$\log(x^3)^2 - \log(\sqrt{x})^3 + \log 2 = \log x^2 + \log 4 - \log \sqrt{x}$$

$$\log x^6 - \log x^{\frac{3}{2}} + \log 2 = \log x^2 + \log 4 - \log x^{\frac{1}{2}}$$

$$\log \frac{2x^6}{x^{\frac{3}{2}}} = \log \frac{4x^2}{x^{\frac{1}{2}}} \text{ odlogaritmuje}$$

$$\frac{2x^6}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{4x^2}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{x^4}{x\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$x^3 = 2$$

$$x = \sqrt[3]{2}$$

$$K = \{\sqrt[3]{2}\}$$

Pedagogická poznámka: Častější než řešení uvedené výše je postup, při kterém studenti všechny členy upraví na substituci $a = \log x$. Získají tak rovnici $3a = \log 4 - \log 2$.

Následující úpravy už je většinou nenapadnou: $3 \log x = \log \frac{4}{2}$

$$\log x^3 = \log 2$$

$$x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}.$$

Př. 5: Vyřeš rovnici: $\log_9^2 9x^2 + \log_9 81x^3 = 5$.

Podmínky: $x > 0$.

Rovnice obsahuje druhou mocninu logaritmu \Rightarrow musíme použít substituci. Uvnitř logaritmů jsou různé výrazy \Rightarrow musíme je upravit na stejný tvar (zřejmě $\log_9 x$).

$$(\log_9 9x^2)^2 + \log_9 81x^3 = 5$$

$$(\log_9 9 + \log_9 x^2)^2 + \log_9 81 + \log_9 x^3 = 5$$

$$(1 + 2 \log_9 x)^2 + 2 + 3 \log_9 x = 5$$

Substituce: $y = \log_9 x$

$$(1 + 2y)^2 + 2 + 3y = 5$$

$$1 + 4y + 4y^2 + 2 + 3y = 5$$

$$4y^2 + 7y - 2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} = \frac{-7 \pm 9}{8}$$

$$y_1 = \frac{-7-9}{8} = -2$$

$$y_2 = \frac{-7+9}{8} = \frac{1}{4}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1 = \log_9 x_1 = -2$$

$$\log_9 x_1 = \log_9 9^{-2}$$

$$y_2 = \log_9 x_2 = \frac{1}{4}$$

$$\log_9 x_2 = \log_9 9^{\frac{1}{4}}$$

$$x_1 = \frac{1}{81}$$

$$x_2 = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$K = \left\{ \frac{1}{81}; \sqrt{3} \right\}$$

Př. 6: Vyřeš rovnici: $\ln(3x-1) \cdot \log_2(x^2) \cdot \log_{0,5}(3-x) = 0$.

Podmínky: $3x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$, $x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$, $3-x > 0 \Rightarrow x < 3$.

Levá strana rovnice obsahuje součin čísel, který se má rovnat nule \Rightarrow rovnice vyjde, pokud se libovolný člen v součinu bude rovnat nule (jde o obdobu součinnového tvaru rovnice) \Rightarrow získáme tři jednoduché rovnice.

$$\ln(3x-1) = 0$$

$$\log_2(x^2) = 0$$

$$\log_{0,5}(3-x) = 0$$

$$\ln(3x-1) = \ln e^0$$

$$\log_2(x^2) = \log_2 2^0$$

$$\log_{0,5}(3-x) = \log_{0,5} 0,5^0$$

$$3x-1=1$$

$$x^2 = 1$$

$$3-x=1$$

$$3x=2$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = -1$$

$$x_4 = 2$$

$$x_1 = \frac{2}{3}$$

Při kontrole podmínek jeden z kořenů $x_3 = -1$ vypadne: $K = \left\{ \frac{2}{3}; 1; 2 \right\}$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je dost odlišný od všeho, co studenti u logaritmů znají, proto se jim většinou snažím poradit. Nejdříve se však snažím, aby si uvědomili, jak rovnice vypadá, že logaritmy jsou jenom „čísla“ (mezi kterými je součin) a na pravé straně je nula.

Př. 7: Vyřeš rovnici: $\ln \left\{ \log_{0,5} \left[\log_{\pi} (\log_3 x - 1) + 2 \right] + 2 \right\} = 0$.

Rovnici budeme zvenku postupně odlogaritmovávat:

$$\ln \left\{ \log_{0,5} \left[\log_{\pi} (\log_3 x - 1) + 2 \right] + 2 \right\} = \ln 1 \quad - \text{odlogaritmuje}$$

$$\log_{0,5} \left[\log_{\pi} (\log_3 x - 1) + 2 \right] + 2 = 1$$

$$\log_{0,5} \left[\log_{\pi} (\log_3 x - 1) + 2 \right] = -1 = \log_{0,5} 0,5^{-1}$$

$$\log_{0,5} \left[\log_{\pi} (\log_3 x - 1) + 2 \right] = \log_{0,5} 2 \quad - \text{odlogaritmuje}$$

$$\log_{\pi} (\log_3 x - 1) + 2 = 2$$

$$\log_{\pi} (\log_3 x - 1) = 0 = \log_{\pi} \pi^0$$

$$\log_{\pi} (\log_3 x - 1) = \log_{\pi} 1 \quad - \text{odlogaritmuje}$$

$$\log_3 x - 1 = 1$$

$$\log_3 x = 2 = \log_3 3^2$$

$$\log_3 x = \log_3 9 \quad - \text{odlogaritmuje}$$

$$x = 9$$

$$K = \{9\}$$

Př. 8: Vyřeš rovnici: $\log_x 3 + 3\log_{3x} 9 = 6\log_{x^2} 3$.

Podmínky: $x > 0$, $x \neq 1$.

Rovnice obsahuje neznámou v základech logaritmů, základy jsou různé \Rightarrow použijeme vzorec na změnu základu a převedeme všechny logaritmy na základ 3 (hodně se vyskytují 3 a jejich mocniny).

$$\log_x 3 + 3\log_{3x} 9 = 6\log_{x^2} 3$$

$$\frac{\log_3 3}{\log_3 x} + 3 \frac{\log_3 9}{\log_3 3x} = 6 \frac{\log_3 3}{\log_3 x^2}$$

$$\frac{1}{\log_3 x} + 3 \frac{2}{\log_3 3 + \log_3 x} = 6 \frac{1}{2\log_3 x}$$

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{6}{1 + \log_3 x} = \frac{3}{\log_3 x}$$

Substitute: $y = \log_3 x$

$$\frac{1}{y} + \frac{6}{1+y} = \frac{3}{y} \quad / y(1+y)$$

$$1+y+6y=3(1+y)$$

$$1+y+6y=3+3y$$

$$4y=2$$

$$y = \frac{1}{2}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y = \log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 x = \log_3 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \sqrt{3}$$

$$K = \{\sqrt{3}\}$$

Shrnutí: